



TITLE:

Besselポテンシャルについて (ポテンシャル論における最大値の原理)

AUTHOR(S):

樋口, 功

CITATION:

樋口, 功. Besselポテンシャルについて (ポテンシャル論における最大値の原理). 数理解析研究所講究録 1972, 146: 1-15

ISSUE DATE:

1972-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106749>

RIGHT:

Bessel ポテンシアル について

鈴鹿工専 樋口 功

§ 1. 序

R^n における次数 α の Riesz 核; $K_\alpha(x) = C_\alpha |x|^{\alpha-n}$ ($0 < \alpha < n$)
 に対し $\mathcal{F}_\alpha = \{ K_{\frac{\alpha}{2}} * g(x); g \in L^2(R^n) \}$ とおく。ノルム
 $\|K_{\frac{\alpha}{2}} * g\|_\alpha = \|g\|_{L^2}$ を導入すると, $L^2(R^n)$ の完備性や合成定
 理等により, \mathcal{F}_α が $C_0^\infty(R^n)$ を稠密に含んだ完備な函数空間に
 なることがわかる。また, $\hat{K}_\alpha(\xi) = C|\xi|^{-\alpha}$ であるから,
 $\forall u \in \mathcal{F}_\alpha$ に対し, Fourier 変換を用いるノルムは $\|u\|_\alpha^2 =$
 $\int |\xi|^\alpha |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$ と書ける。さらに, α 次のエネルギー
 有限な正の測度の全体を $\mathcal{E}_\alpha^+(R^n)$ と書けば, $\{ K_\alpha \mu_1(x) - K_\alpha \mu_2(x);$
 $\mu_i \in \mathcal{E}_\alpha^+(R^n) \}$ は \mathcal{F}_α で稠密である。

以上は H. Cartan や J. Deny の結果であるが, N. Aronszajn
 と K. T. Smith は [1] において, 函数空間とその完備化の一
 般論を展開し, その立場から以上の結果を調べ直し, さらに
 [2] において, $C_0^\infty(R^n)$ をノルム $\|u\|_\alpha^2 = \int (1+|\xi|^2)^\alpha |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$ で
 完備化した函数空間 $P^\alpha(R^n)$ は次の式で定義される再生核・

$G_{2\alpha}(x-y)$ を持つことを示した。

$$G_{2\alpha}(x-y) = \frac{1}{2^{\frac{n+2\alpha-2}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\alpha)} K_{\frac{n-2\alpha}{2}}(|x-y|) |x-y|^{\frac{2\alpha-n}{2}}.$$

K_ν が次数 ν の第一種 (変形) Bessel 函数であることから, $G_{2\alpha}$ を核とするポテンシャルは Bessel ポテンシャルと呼ばれる。

以下に, Aronszajn-Smith [2] で得られた諸結果, とくに核 $G_{2\alpha}(x-y)$ の構成法を紹介し, それらの事実をもとに, \mathbb{R}^n の領域 Ω 上の函数空間 $P^\alpha(\Omega)$ の核と次数 α および Ω の Green 函数 $G_{2\alpha}^\Omega(x, y)$ の間の関係について考察したい [4]。

§ 2. Bessel 核, Bessel ポテンシャルの性質

Aronszajn-Smith [2] の結果をまとめる。

[I] $G_{2\alpha}$ の性質

(a) $x \rightarrow 0$ および $|x| \rightarrow +\infty$ のときの $G_{2\alpha}(x)$ の order は

$$G_{2\alpha}(x) \sim C |x|^{2\alpha-n} \quad (2\alpha < n \text{ のとき})$$

$$x \rightarrow 0 \text{ のとき} \quad G_n(x) \sim C \log \frac{1}{|x|}$$

$$G_{2\alpha}(x) \sim C \quad (2\alpha > n \text{ のとき})$$

$$|x| \rightarrow +\infty \text{ のとき } G_{2\alpha}(x) \sim C |x|^{\frac{2\alpha-n-1}{2}} e^{-|x|}$$

$$(b) \quad G_{2\alpha}(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{かつ} \quad \widehat{G_{2\alpha}}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (1+|\xi|^2)^{-\alpha}$$

$$(c) \quad \text{合成定理が成り立つ: } G_{\alpha+\beta}(x) = G_\alpha * G_\beta(x)$$

[II] 正の測度 μ に対し $G_{2\alpha}\mu(x) = \int G_{2\alpha}(x-y) d\mu(y)$ を μ の次数 2α の Bessel ポテンシールと呼び, 2α -エネルギー $\|\mu\|_{2\alpha}^2 = \int \int G_{2\alpha}(x-y) d\mu(x) d\mu(y)$ が有限となる正の測度の全体を $E_{2\alpha}(\mathbb{R}^n)$ とすると, 次の条件は同値である。

$$(a) \quad \mu \in E_{2\alpha}(\mathbb{R}^n)$$

$$(b) \quad G_{2\alpha}\mu \in P^\alpha(\mathbb{R}^n)$$

$$(c) \quad G_\alpha\mu \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

さらに $\mu \in E_{2\alpha}(\mathbb{R}^n)$ ならば $P^\alpha(\mathbb{R}^n)$ の任意の元 u は μ -可積分で, $\int u d\mu = (u, G_{2\alpha}\mu)_\alpha$ が成り立つ。

[III] 核 $G_{2\alpha}(x-y)$ に関する内, 外容量を普通に定義すれば G. Choquet の条件がみたされ, 全ての解析集合は可容となる。

2α -容量 0 なる集合の全体を $\mathcal{A}_{2\alpha}$ で表わすと, $\mathcal{A}_{2\alpha}$ の集合の Lebesgue 測度は 0 である。

性質 P が 2α -容量 0 の集合を除いて成り立つことを,
 $P \text{ exc. } \mathcal{U}_{2\alpha}$ と書くことにすれば,

$$P^\alpha(R^n) = \{u; \exists g \in L^2(R^n) \rightarrow u(x) = G_\alpha g(x) \text{ exc. } \mathcal{U}_{2\alpha}\}$$

となる。

[IV] $\{G_{2\alpha}\mu_1 - G_{2\alpha}\mu_2; \mu_i \in E_{2\alpha}(R^n)\}$ は $P^\alpha(R^n)$ の稠密である。

Bessel 核の掃散可能性については、次の事が知られている。

[V] $0 < \alpha \leq 1$ のとき $G_{2\alpha}(x-y)$ は掃散原理をみたす。

すなわち、任意の正の測度 μ および任意の閉集合 F に対し、

$$G_{2\alpha}\mu'(x) = G_{2\alpha}\mu(x) \quad \text{on } F \text{ exc. } \mathcal{U}_{2\alpha}$$

$$G_{2\alpha}\mu'(x) \leq G_{2\alpha}\mu(x) \quad \text{in } R^n$$

をみたす F 上の正の測度 μ' が存在する。[8]

§3. 領域上の函数空間

Ω を R^n の領域とする。 $C_0^\infty(\Omega)$ をノルム $\|\cdot\|_\alpha$ で完備化した函数空間 $P^\alpha(\Omega)$ の核はどうなるだろうか?

$P^\alpha(R^n)$ の核 $G_{2\alpha}$ との関係はどうだろうか? 以下においてこの問題を考察する。

具体的に言うと、 Ω 内に有界な台をもつ 2α -エネルギー

有限な正の測度の全体を $E_{2\alpha}(\Omega)$ とするとき, Riesz の定理により, $\forall \mu \in E_{2\alpha}(\Omega)$ に対し

$$(f, U_{2\alpha}^{\Omega} \mu)_{\alpha} = \int f d\mu \quad \text{for } \forall f \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

をみたす $P^{\alpha}(\Omega)$ の元 $U_{2\alpha}^{\Omega} \mu$ (これを $P^{\alpha}(\Omega)$ 内での μ のポテンシャルと呼ぶことにする) が存在するが, このポテンシャル $U_{2\alpha}^{\Omega} \mu$ の核について考察したい。

§ 4. Green 函数, α -調和函数

$0 < \alpha \leq 1$ のときは §2, [V] で述べたように $G_{2\alpha}(x-y)$ は掃散原理をみたすが, 一般に $\alpha > 1$ の場合をも扱いたい。そこで Riesz 核 $|x-y|^{\alpha-n}$ に関し M. Ito [5] により導入された higher order の掃散および α -調和函数の理論を Bessel ポテンシャル論に持ち込む。

定理 1. $\alpha > 0$ とし p を $0 < \alpha - p \leq 1$ なる正整数とすると, 有界な台をもつ任意の正の測度 μ および任意の閉集合 F に対し, 次の式をみたす F 上の正の測度列 $\{\mu_i'\}_{i=0}^p$ が唯一組存在する。

$$G_{2\alpha}\mu(x) = \sum_{i=0}^p G_{2(\alpha-i)}\mu'_i(x) \quad \text{on } F \text{ exc. } \mathcal{O}_{2(\alpha-p)}$$

$$G_{2\alpha}\mu(x) \geq \sum_{i=0}^p G_{2(\alpha-i)}\mu'_i(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

$$G_{2q}\mu(x) = \sum_{i=0}^{q-1} G_{2(q-i)}\mu'_i(x) \quad \text{on } F \text{ exc. } \mathcal{O}_2$$

$$G_{2q}\mu(x) \geq \sum_{i=0}^{q-1} G_{2(q-i)}\mu'_i(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

但し q は $0 < q \leq p$ をみたす任意の整数である。

定理 1'. 定理 1 の条件のもとに，次の式をみたす F 上の正の測度列 $\{\mu''_i\}_{i=0}^p$ が唯一組存在する。

$$G_{2(\alpha-p)}\mu(x) = G_{2(\alpha-p)}\mu''_0(x) \quad \text{on } F \text{ exc. } \mathcal{O}_{2(\alpha-p)}$$

$$G_{2(\alpha-p)}\mu(x) \geq G_{2(\alpha-p)}\mu''_0(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

$$G_{2(\alpha-p+q)}\mu(x) = G_{2(\alpha-p+q)}\mu''_0(x) + \sum_{i=1}^q G_{2(q-i+1)}\mu''_i(x) \quad \text{on } F \text{ exc. } \mathcal{O}_2$$

$$G_{2(\alpha-p+q)}\mu(x) \geq G_{2(\alpha-p+q)}\mu''_0(x) + \sum_{i=1}^q G_{2(q-i+1)}\mu''_i(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

但し q は $1 < q \leq p$ をみたす任意の整数である。

以上二つの定理の証明は，合成定理による核の分解

$$G_{2\alpha} = G_{2(\alpha-p)} * G_2 * G_2 * \cdots * G_2$$

に基づく M. Ito [5] の方法がそのままここでも使える。

定義 Ω を領域とし単位測度 ε_y の $C\Omega$ 上への, 定理 1 の意味での掃散測度列を $\{(\varepsilon'_{y,C\Omega})_i\}_{i=0}^p$ とするとき,

$$G_{2\alpha}^{\Omega}(x, y) = G_{2\alpha}(x-y) - \sum_{i=0}^p G_{2(\alpha-i)}(\varepsilon'_{y,C\Omega})_i(x)$$

を Ω の次数 2α の Green 函数と呼ぶ。

注意 1. $0 < \alpha \leq 1$ のとき $G_{2\alpha}^{\Omega}(x, y) = G_{2\alpha}^{\Omega}(y, x)$ となり, 従って $G_{2\alpha}^{\Omega}(x, y)$ は y の函数として可測である。一般には $G_{2\alpha}^{\Omega}(x, y)$ は対称とは限らないが,

$$G_{2\alpha}^{\Omega}(x, y) = \int \cdots \int G_{2(\alpha-p)}^{\Omega}(x, z_1) \cdot G_2^{\Omega}(z_1, z_2) \cdots G_2^{\Omega}(z_p, y) dz_1 dz_2 \cdots dz_p$$

と書ける。但し $G_{2(\alpha-p)}^{\Omega}$, G_2^{Ω} は各々, 次数 $2(\alpha-p)$, 次数 2 の Green 函数である。

注意 2. 有界な台をもつ任意の正の測度 μ に対し,

$$G_{2\alpha}^{\Omega} \mu(x) = \int G_{2\alpha}^{\Omega}(x, y) d\mu(y), \quad \check{G}_{2\alpha}^{\Omega} \mu(x) = \int G_{2\alpha}^{\Omega}(y, x) d\mu(y)$$

とおくと,

$$G_{2\alpha}^{\Omega} \mu(x) = G_{2\alpha} \mu(x) - \sum_{i=0}^p G_{2(\alpha-i)} \mu'_i(x)$$

$$G_{2\alpha}^{\vee \Omega} \mu(x) = G_{2\alpha} \mu(x) - G_{2\alpha} \mu''_0(x) - \sum_{i=1}^p G_{2(p-i+1)} \mu''_i(x)$$

が成り立つ。但し $\{\mu'_i\}_{i=0}^p$, $\{\mu''_i\}_{i=0}^p$ は各々, μ の, 定理 1 および定理 1' の意味の掃散測度列 ($C\Omega$ 上への) である。

§ 2, [I], (b) により $\hat{G}_{2\alpha}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (1+|\xi|^2)^{-\alpha}$ となるから, $T_{2\alpha} * G_{2\alpha} = \varepsilon$. なる超函数 $T_{2\alpha}$ ($\hat{T}_{2\alpha} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (1+|\xi|^2)^{\alpha}$) が存在する。[5] にならうと, Bessel ポテンシャル論における α -調和函数を次の様に定義する。

定義 次の条件をみたす函数 $u(x)$ は Ω 内 \mathbb{R}^n , Bessel ポテンシャル論の意味で, α -調和であるという。

(a) $u(x)$ は \mathbb{R}^n 上 exc. $\mathcal{O}_{2\alpha}$ で定義された局所可積分函数。

(b) $T_{2\alpha} * u$ が定義され, Ω 内 \mathbb{R}^n , 超函数の意味で

$$T_{2\alpha} * u = 0$$

が成り立つ。

補題 1. $\alpha > 0$ とし, p を $0 < \alpha - p \leq 1$ なる正整数とする。 μ を総質量有限な正の測度とすれば, $0 \leq i \leq p$ なる任意の

整 α に対し, ポテンシャル $G_{2(\alpha-1)}\mu(x)$ は $C_{S\mu}$ 2^α -調和となる。

注意 この補題により, Green 函数 $G_{2\alpha}^\Omega(x, y)$ は $\Omega - \{x\}$ 2^α -調和であることがわかる。

§ 5. $0 < \alpha \leq 1$ の場合

定理 2. Ω を \mathbb{R}^n の領域とする。 $0 < \alpha \leq 1$ のとき, Ω の Green 函数 $G_{2\alpha}^\Omega(x, y)$ は函数空間 $P^\alpha(\Omega)$ の核となる。すなわち, 任意の $\mu \in E_{2\alpha}(\Omega)$ に対し

$$U_{2\alpha}^\Omega \mu = G_{2\alpha}^\Omega \mu \quad \text{in } P^\alpha(\Omega)$$

となる。

証明 $\int e(x) dx = 1$ かつ $e(x) = 0$ for $|x| \geq 1$ なる $e(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し $e_\rho(x) = \int e(\frac{x}{\rho})$ とおく。 $\{\omega_n\}$ を Ω の exhaustion とすれば, $G_{2\alpha}^{\omega_n} \mu \in P^\alpha(\mathbb{R}^n)$ より

$$G_{2\alpha}^{\omega_n} \mu * e_\rho(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cap P^\alpha(\mathbb{R}^n)$$

また $\rho \rightarrow 0$ のとき, $G_{2\alpha}^{\omega_n} \mu * e_\rho(x) \rightarrow G_{2\alpha}^{\omega_n} \mu$ in $P^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 。

一方, $G_{2\alpha}^{\omega_n} \mu(x) = G_{2\alpha} \mu(x) - G_{2\alpha} \mu'_{C\omega_n}(x) = 0$ on $C\omega_n$ exc. $\partial_{2\alpha}$ より, 十分小なる ρ に対し, $G_{2\alpha}^{\omega_n} \mu * e_\rho(x) \in P^\alpha(\Omega)$ となり,

従、 $G_{2\alpha}^{\omega_n} \mu \in P^\alpha(\Omega)$ となる。

$G_{2\alpha}^\Omega \mu \in P^\alpha(\Omega)$ を示す。 μ の $C\Omega$ および $C\omega_n$ 上への掃散測度を各々 $\mu'_{C\Omega}$, $\mu'_{C\omega_n}$ とすれば, $\{\mu'_{C\omega_n}\}$ は $E_{2\alpha}(R^n)$ 上 $\mu'_{C\Omega}$ に強収束する ([3] を参照)。よ、 $P^\alpha(R^n)$ 内 $G_{2\alpha}^{\omega_n} \mu \rightarrow G_{2\alpha}^\Omega \mu$ となり, $G_{2\alpha}^{\omega_n} \mu \in P^\alpha(\Omega)$ だから $G_{2\alpha}^\Omega \mu \in P^\alpha(\Omega)$ となる。

次に, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し

$$(\varphi, U_{2\alpha}^\Omega \mu)_\alpha = \int \varphi d\mu = \int \varphi d\mu - \int \varphi d\mu'_{C\Omega} = (\varphi, G_{2\alpha}^\Omega \mu)_\alpha$$

で, $P^\alpha(\Omega)$ の定義より $C_0^\infty(\Omega)$ は $P^\alpha(\Omega)$ で稠密だから

$$U_{2\alpha}^\Omega \mu = G_{2\alpha}^\Omega \mu \quad \text{in } P^\alpha(\Omega)$$

となる。

§ 6 . 一般の場合

補題 2. 任意の $\mu \in E_{2\alpha}(\Omega)$ に対し $U_{2\alpha}^\Omega \mu = G_{2\alpha}^\Omega \mu$ が成り立つは, 任意の $\mu \in E_{2\alpha}(\Omega)$ に対し $\check{G}_{2\alpha}^\Omega \mu = G_{2\alpha}^\Omega \mu$ が成り立つ。

証明 μ, ν を $E_{2\alpha}(\Omega)$ の任意の測度とする。仮定より

$$\begin{aligned}
\iint G_{2\alpha}^{\Omega}(x, y) d\nu(x) d\mu(y) &= (U_{2\alpha}^{\Omega}\mu, U_{2\alpha}^{\Omega}\nu)_{\alpha} \\
&= (U_{2\alpha}^{\Omega}\nu, U_{2\alpha}^{\Omega}\mu)_{\alpha} \\
&= \iint G_{2\alpha}^{\Omega}(y, x) d\mu(y) d\nu(x),
\end{aligned}$$

従って

$$\int (G_{2\alpha}^{\Omega}\mu(x) - \check{G}_{2\alpha}^{\Omega}\mu(x)) d\nu(x) = 0$$

で、 ν は任意だから、 $G_{2\alpha}^{\Omega}\mu(x) = \check{G}_{2\alpha}^{\Omega}\mu(x)$ exc. $\mathcal{O}_{2\alpha}$ となる。

定理 3. 次の三条件は同値である。

(a) Green 函数 $G_{2\alpha}^{\Omega}(x, y)$ が函数空間 $P^{\alpha}(\Omega)$ の核となるような有界領域 $\Omega (\neq \emptyset)$ が存在する。

(b) $G_{2\alpha}^{\Omega}\mu \in P^{\alpha}(\Omega)$ かつ $P^{\alpha}(\Omega)$ の元として $\check{G}_{2\alpha}^{\Omega}\mu = G_{2\alpha}^{\Omega}\mu$ が成り立つ有界領域 $\Omega (\neq \emptyset)$ と $E_{2\alpha}(\Omega)$ の測度 $\mu (\neq 0)$ が存在する。

(c) $0 < \alpha \leq 1$.

注意 1. 定理 2 により、(a) または (b) の条件をみたす領域が一つ存在すれば、実は全々の領域がこの条件をみたすことがわかる。また“有界”という条件を“ $C\Omega$ の Lebesgue 測度が正”という条件に置き換えることもできる。

注意 2. M. Ito は [7] において超函数 $T_{2\alpha}$ の性質を調べ、(b)内の条件 " $G_{2\alpha}^\Omega \mu = \check{G}_{2\alpha}^\Omega \mu$ " は $G_{2\alpha}^\Omega \mu \in p'(\Omega)$ から導かれることを示してくれた。

定理 3 の証明 (c) \Rightarrow (a) は定理 2 で、(a) \Rightarrow (b) は補題 2 ですでに示してあるの、(b) \Rightarrow (c) を示せば十分である。

まず $1 < \alpha < 2$ (すなわち $p=1$) とし矛盾を導く。

(b) から
$$G_{2\alpha} \mu - G_{2\alpha} \mu'_0 - G_{2(\alpha-1)} \mu'_1 = G_{2\alpha} \mu - G_{2\alpha} \mu''_0 - G_2 \mu''_1$$

となり補題 1 により $G_2 \mu''_1$ は Ω で α -調和となる。ゆえに

$$T_{2(\alpha-1)} * \mu''_1 = T_{2\alpha} * G_2 \mu''_1 = 0 \text{ in } \Omega.$$

一方、 $\hat{T}_{2(\alpha-1)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (1+|\xi|^2)^{\alpha-1}$ だから $1 < \alpha < 2$ のとき、負型函数に関する Levy-Khintchine の定理により次の条件をみたす、 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ の対称な正の測度 σ が存在する。

$$(1) \quad (1+|\xi|^2)^{\alpha-1} = 1 + \int_{|y|>0} (1 - e^{i\xi \cdot y}) d\sigma(y),$$

(2) 任意の $r > 0$ に対し

$$\int_{|y|>r} d\sigma(y) < +\infty \quad \text{かつ} \quad \int_{0 < |y| < r} |y|^2 d\sigma(y) < +\infty.$$

(1), (2) から, 任意の $\delta > 0$ に対し

$$\int_{|y| < \delta} |y|^2 d\sigma(y) > 0$$

が従う。なぜなら, $\int_{|y| < \delta_0} |y|^2 d\sigma(y) = 0$ となる $\delta_0 > 0$ が存在したとすると, (2) により $\int_{|y| > 0} d\sigma(y) < +\infty$ となり, (1) から $(1+|x|^2)^{\alpha-1}$ が有界になってしまうからである。

さて, $T_{2(\alpha-1)} * \mu_1'' = 0$ in Ω 故に, 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し

$$0 = T_{2(\alpha-1)} * \mu_1''(\varphi) = \mu_1'' * \varphi(0) + \int (\mu_1'' * \varphi(0) - \mu_1'' * \varphi(y)) d\sigma(y)$$

となり $\int \mu_1'' * \varphi(y) d\sigma(y) = 0$ が成り立つ。ところが, 任意の $\delta > 0$ に対し $\int_{|y| < \delta} |y|^2 d\sigma(y) > 0$ があったから, φ を適当に選べば $\int \mu_1'' * \varphi(y) d\sigma(y) \neq 0$ と出来るので矛盾である。

最後に $\alpha \geq 2$ とし矛盾を導く。

(b) により

$$G_{2\alpha}\mu - G_{2\alpha}\mu_0 - \sum_{i=1}^p G_{2(p-i+1)}\mu_i'' \in P^\alpha(\Omega) \subset P^2(\Omega)$$

従って

$$G_2 * \left(\sum_{i=1}^{p-1} G_{2(p-i)}\mu_i'' + \mu_p'' \right) \in P^2(\Omega)$$

となる。§ 2, [II], (C) により

$$\sum_{i=1}^{p-1} G_{2(p-i)}\mu_i'' + \mu_p'' \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

となるが、 μ_p'' は Ω の境界 $\partial\Omega$ 上の測度であるから矛盾である。

注意 M. Ito は [6] において、以上の結果を一般の regular functional space \mathcal{Z} の話に拡張し、次の結果を得た。

定理 (M. Ito [6]) X を locally compact, σ -compact な Hausdorff space, ξ を X 上の稠密な測度とする。 H を X , ξ に関する regular な functional space, H_Ω を開集合 Ω 上の functional space とすると、次の条件は同値である。

- (a) 任意の開集合 Ω に対し、 H_Ω が正の核をもつ
- (b) H が掃散原理をみたす。

これによると、 $\alpha > 1$ の場合、 $p^\alpha(\Omega)$ は正の核をもたなくなるわけだが、事情がむづかしくなり、筆者には $p^\alpha(\Omega)$ の核について何もわかっていない。

参考文献

- [1] N. Aronszajn — K. T. Smith : Functional spaces and functional completion, Ann. Inst. Fourier, 6 (1956)
- [2] ————— : Theory of Bessel potentials, Part 1, Ann. Inst. Fourier, 11 (1961)
- [3] B. Fuglede : On the theory of potentials in locally compact spaces, Acta Math., 103 (1960)
- [4] I. Higuchi : On the Bessel Kernel for a Domain (to appear)
- [5] M. Ito : Etude des potentiels d'ordre α et des fonctions α -harmoniques, Inventiones Math., 8 (1969)
- [6] : Une caractérisation du principe du balayage pour un espace fonctionnel régulier, (à paraître)
- [7] : Remarque sur les espaces fonctionnels au noyau bessélien, (à paraître)
- [8] M. Kishi : Positive kernels and potentials, Lecture note, Nagoya Univ., (1970 ~ 1971)